ANALYSE FONCTIONNELLE

K-théorie des quasi-cristaux, image par la trace : le cas du réseau octogonal
K-theory of quasicrystals, gap labelling : the octagonal lattice

Jean Bellissard, Edouard Contensou, André Legrand.

Titre courant : "Label des gaps" pour le quasi-cristal octogonal.

Résumé. On montre que la C^*-algèbre d'un quasi-cristal, construit par la méthode de la bande et projection, est Morita-équivalente à un produit croisé. Sa K-théorie est alors donnée par aboutissement de la suite spectrale de Kasparov. Celle-ci dégénère dans le cas d'un quasi-cristal de dimension 2. On en déduit le calcul de la valeur de la trace sur le groupe K_0 du quasi-cristal octogonal.

Abstract. We show that the C^*-algebra of a quasicrystal constructed by the strip and projection method is Morita-equivalent to a crossed product. Its K-theory is thus obtained as limit of the Kasparov spectral sequence. When the quasicrystal is 2-dimensional, the spectral sequence degenerates and leads to the gap labelling for the octagonal quasicrystal.

1 - Quasi-cristaux et C*-algèbres associées.

Un quasi-cristal est défini dans [8] par la donnée dans l'espace $\mathbf{R}^\nu$ d'un sous espace $E^{\|}$ de dimension d orienté irrationnellement, c'est-à-dire qui intersecte trivialement le réseau $\mathbf{Z}^\nu$. La *bande* est $\Sigma = (\Delta + E^{\|}) \cap \mathbf{Z}^\nu$ et le *quasi-cristal* est le projeté de Σ sur $E^{\|}$; sa *zone d'acceptance* est $(\Delta + E^{\|}) \cap E^\perp$, où $E^\perp$ est l'orthogonal de $E^{\|}$.

Soit $T : \mathbf{Z}^\nu \to B\big(\ell^2(\mathbf{Z}^\nu)\big)$ la représentation régulière gauche. Pour toute partie $Y \subset \mathbf{Z}^\nu$ et $g \in \mathbf{Z}^\nu$, gY désigne le translaté de Y par g et χ_Y le projecteur canonique $\ell^2(\mathbf{Z}^\nu) \to \ell^2(Y) \subset \ell^2(\mathbf{Z}^\nu)$ (χ_Σ est noté simplement χ). La *C^*-algèbre du quasi-cristal*, $C^*(\Sigma)$, est la sous-C^*-algèbre de $B\big(\ell^2(\mathbf{Z}^\nu)\big)$ engendrée par les isométries partielles $S_g = \chi T_g \chi = \chi_{\Sigma \cap g\Sigma} T_g$, $g \in \mathbf{Z}^\nu$.

Nous allons établir que $C^*(\Sigma)$ est Morita-équivalente à un produit croisé d'une AF-algèbre abélienne par $\mathbf{Z}^\nu$ en réduisant le problème à des équivalences au niveau des groupoïdes ([10]).

On note $g\chi$ pour $T_g \chi T_g^{-1} = \chi_{g\Sigma}$. La famille des projecteurs $\{g\chi, g \in \mathbf{Z}^\nu\}$ engendre une C^*–algèbre abélienne $C^*(g\chi, g \in \mathbf{Z}^\nu) \subset B\big(\ell^2(\mathbf{Z}^\nu)\big)$. C'est une AF-algèbre et son spectre $E^\perp_{\mathcal{F}}$ est totalement discontinu ([4]). L'hypothèse d'irrationnalité entraine que la projection sur $E^\perp$ parallèlement à $E^{\|}$ induit une injection $\mathbf{Z}^\nu \hookrightarrow E^\perp$ qui permet de représenter $C^*(g\chi, g \in \mathbf{Z}^\nu)$ comme une sous-algèbre de fonctions de $L^2(E^\perp)$: on identifie le projecteur $g\chi$ à la fonction caractéristique du projeté de $g(\Delta + E^{\|})$ sur $E^\perp$. Comme l'injection $\mathbf{Z}^\nu \hookrightarrow E^\perp$ est d'image dense, on a une inclusion $C_0(E^\perp) \hookrightarrow C_0(E^\perp_{\mathcal{F}})$ d'où une surjection continue de $E^\perp_{\mathcal{F}} \to E^\perp$.

Le groupe $\mathbf{Z}^\nu$ agit naturellement sur $C^*(g\chi, g \in \mathbf{Z}^\nu)$ par $h \cdot g\chi = (hg)\chi$. On en déduit une action naturelle sur son spectre : pour $\omega \in E^\perp_{\mathcal{F}}$ et $g \in \mathbf{Z}^\nu$, le caractère $g^{-1}\omega$ est défini sur les générateurs de $C^*(g\chi, g \in \Sigma^\nu)$ par $(g^{-1}\omega)(h\chi) = \omega(gh\chi)$ (cette action est compatible avec celle de $\mathbf{Z}^\nu$ sur $E^\perp$ par translation via l'injection $\mathbf{Z}^\nu \hookrightarrow E^\perp$). On note $E^\perp_{\mathcal{F}} \rtimes \mathbf{Z}^\nu$ le groupoïde de cette action ([10]) ; sa C^*-algèbre enveloppante est l'algèbre produit croisé $C_0(E^\perp_{\mathcal{F}}) \rtimes \mathbf{Z}^\nu$.

Considérons la sous-C^*-algèbre abélienne $C_0(E^\perp_{\mathcal{F}}) \cap C^*(\Sigma)$ engendrée par les projecteurs de la forme $\chi(g\chi) = \chi_{\Sigma\cap(g\Sigma)} = S_g S_g^*$ $(g \in \mathbf{Z}^\nu)$. Elle est unitaire d'unité χ, son spectre Ω est compact et on a une inclusion naturelle $\Omega \hookrightarrow E^\perp_{\mathcal{F}}$, qui a tout $\omega \in \Omega$ associe $\widetilde{\omega} \in C^*(g\chi, g \in \mathbf{Z}^\nu)$ défini par $\widetilde{\omega}(f) = \omega(\chi f)$ pour $f \in C_0(E^\perp_{\mathcal{F}})$.

Définition 1 : *notons* $\Gamma = \{(\omega, g) \in \Omega \times \mathbf{Z}^\nu \mid \omega(\chi_{\Sigma\cap(g\Sigma)}) = 1\}$. *Pour* $(\omega, g) \in \Gamma$, *on définit le caractère* $g^{-1}\omega$ *sur les générateurs de* $C^*(\chi_{\Sigma\cap(g\Sigma)}, g \in \mathbf{Z}^\nu)$ *en posant pour tout* $h \in \mathbf{Z}^\nu$ *:*

$$(g^{-1}\omega)(\chi_{\Sigma\cap h\Sigma}) = \omega(\chi_{\Sigma\cap g(\Sigma\cap h\Sigma)}) \quad \textit{c'est-à-dire} \quad (g^{-1}\omega)(\chi h\chi) = \omega\big(\chi g(\chi h\chi)\big).$$

Muni de l'inversion et du produit naturels, de la topologie produit, Γ *est un groupoïde r-discret dont l'espace des unités est* Ω. *On note* $C^*(\Gamma)$ *sa* C^**-algèbre enveloppante.*

L'inclusion $\Omega \hookrightarrow E^\perp_{\mathcal{F}}$ se prolonge en une inclusion de groupoïdes $\Gamma \hookrightarrow E^\perp_{\mathcal{F}} \rtimes \mathbf{Z}^\nu$; en fait :

Théorème 1 : *la transformation de Gelfand* $C^*(\chi(g\chi), g \in \mathbf{Z}^\nu) \xrightarrow{\sim} C(\Omega)$ *se prolonge en un isomorphisme canonique entre* $C^*(\Sigma)$ *et* $C^*(\Gamma)$. *De plus,* Ω *est une tranversale du groupoïde* $E^\perp_{\mathcal{F}} \rtimes \mathbf{Z}^\nu$ *et* Γ *est le sous-groupoïde réduit associé ; en particulier les* C^**-algèbres* $C^*(\Sigma)$ *et* $C_0(E^\perp_{\mathcal{F}}) \rtimes \mathbf{Z}^\nu$ *sont Morita-équivalentes.*

L'isomorphisme $C^*(\Sigma) \simeq C^*(\Gamma)$ est montré dans [5]. Voir [9] (ex. 2.7 et th. 2.8) pour la notion de transversalité dans les groupoïdes et [3] pour la démonstration.

On choisit ensuite arbitrairement un facteur $\mathbf{R}^{\nu-d}$ de $\mathbf{R}^\nu$ et on note $\mathbf{Z}^{\nu-d}$ l'intersection de $\mathbf{Z}^\nu$ avec ce facteur. Soient $\mathbf{T}^{\nu-d}$ la projection sur $E^\perp$ du pavé unité $[0,1[^{\nu-d}$ de $\mathbf{R}^{\nu-d}$ et $\mathbf{T}^{\nu-d}_{\mathcal{F}}$ sa pré-image par la surjection $E^\perp_{\mathcal{F}} \to E^\perp$. C'est un domaine fondamental de l'action de $\mathbf{Z}^{\nu-d}$ sur $E^\perp_{\mathcal{F}}$ et c'est une tranversale du groupoïde $E^\perp_{\mathcal{F}} \rtimes \mathbf{Z}^{\nu-d}$. En particulier les C^*-algèbres $C_0(E^\perp_{\mathcal{F}}) \rtimes \mathbf{Z}^{\nu-d}$ et $C(\mathbf{T}^{\nu-d}_{\mathcal{F}})$ sont Morita-équivalentes (ce que l'on peut aussi établir grâce à [11], sit. 2).

Corollaire 1 : *les* C^**-algèbres* $C^*(\Sigma)$ *et* $C(\mathbf{T}^{\nu-d}_{\mathcal{F}}) \rtimes \mathbf{Z}^d$ *sont Morita-équivalentes.*

2 - Suite spectrale de Kasparov et K-théorie des quasi-cristaux.

L'espace $\mathbf{T}^{\nu-d}_{\mathcal{F}}$ est totalement discontinu donc $K_q\big(C(\mathbf{T}^{\nu-d}_{\mathcal{F}})\big) = C(\mathbf{T}^{\nu-d}_{\mathcal{F}}, \mathbf{Z})$ si q est pair, 0 si q est impair, où $C(\mathbf{T}^{\nu-d}_{\mathcal{F}}, \mathbf{Z})$ est le groupe des fonctions continues de $\mathbf{T}^{\nu-d}_{\mathcal{F}}$ dans $\mathbf{Z}$ ([2]). Il résulte de [7] (th. p. 199, en remarquant que $d_2 = 0$) que :

Théorème 2 : *la* K*-théorie de la* C^**-algèbre* $C^*(\Sigma)$ *est limite d'une* E^3*-suite spectrale, dont les termes initiaux sont*

$$E^3_{p,q} = \begin{cases} H_p\big(\mathbf{Z}^d, C(\mathbf{T}^{\nu-d}_{\mathcal{F}}, \mathbf{Z})\big) & \textit{si } q \textit{ est pair,} \\ 0 & \textit{si } q \textit{ est impair,} \end{cases}$$

où $H_p\big(\mathbf{Z}^d, C(\mathbf{T}^{\nu-d}_{\mathcal{F}}, \mathbf{Z})\big)$ *est l'homologie du groupe* $\mathbf{Z}^d$ *à coefficients dans le* $\mathbf{Z}^d$*-module* $C(\mathbf{T}^{\nu-d}_{\mathcal{F}}, \mathbf{Z})$. *Cette suite spectrale converge vers* $K_*\big(C^*(\Sigma)\big)$.

Voir [3]. Dans le cas où $d = 2$ (ν quelconque), des arguments classiques de suites spectrales ([6]) entrainent :

Corollaire 2 : *la K-théorie d'un quasi-cristal de dimension $d = 2$ vérifie :*

$$K_0\big(C^*(\Sigma)\big) \simeq \mathbf{Z} \oplus K_0\big(C^*(\mathbf{T}_{\mathcal{F}}^{\nu-2})\big)_{\mathbf{Z}^2} = \mathbf{Z} \oplus C(\mathbf{T}_{\mathcal{F}}^{\nu-2}, \mathbf{Z})_{\mathbf{Z}^2}$$
$$K_1\big(C^*(\Sigma)\big) \simeq H_1\left(\mathbf{Z}^2, K_0\big(C(\mathbf{T}_{\mathcal{F}}^{\nu-2})\big)\right)$$

où $C(\mathbf{T}_{\mathcal{F}}^{\nu-2}, \mathbf{Z})_{\mathbf{Z}^2}$ désigne le sous-groupe des co-invariants de $C(\mathbf{T}_{\mathcal{F}}^{\nu-2}, \mathbf{Z})$ par l'action de $\mathbf{Z}^2$.

Le terme $\mathbf{Z}$ correspond au sous-groupe des invariants $K_0\big(C(\mathbf{T}_{\mathcal{F}}^{\nu-2})\big)^{\mathbf{Z}^2}$, l'irrationnalité impliquant que le seul projecteur invariant est l'identité.

3 - Trace sur la $\mathbf{K_0}$-théorie et application au quasi-cristal octogonal.

Via la représentation dans $B\big(L^2(E^\perp)\big)$, on définit sur les trois algèbres abéliennes $C(\mathbf{T}_{\mathcal{F}}^{\nu-d}) \subset C(\Omega) \subset C_0(E_{\mathcal{F}}^\perp)$ la trace $\tau(f) = \int f\, d\mu$, où μ désigne la mesure de Lebesgue sur $E^\perp$ normalisée par la condition $\tau(\chi) = 1$ (la zone d'acceptance est ainsi de mesure 1). Cette trace est invariante par l'action de $\mathbf{Z}^\nu$ donc induit une trace encore notée τ sur le produit croisé $C(\mathbf{T}_{\mathcal{F}}^{\nu-d}) \rtimes \mathbf{Z}^d$. L'invariance de τ par $\mathbf{Z}^\nu$ entraine aussi qu'en dimension $d = 2$, le corollaire 2 suffit pour calculer sa valeur sur la K_0-théorie (ce qui permet l'étiquetage des bandes interdites du spectre, voir [1] et [2], "Gap labelling theorem") :

Théorème 3 : *soit τ_* le morphisme induit en K-théorie par la trace τ ; pour un quasi-cristal de dimension $d = 2$ (ν quelconque),*

$$\tau_*\left(K_0\big(C^*(\Sigma)\big)\right) = \tau_*\left(K_0\big(C(\mathbf{T}_{\mathcal{F}}^{\nu-2})\big)\right) = \mu\big(C(\mathbf{T}_{\mathcal{F}}^{\nu-2}, \mathbf{Z})\big).$$

La seconde égalité est vérifiée pour tout espace compact totalement discontinu ([2], lemme 5.1.2). Les générateurs de l'algèbre $C(\mathbf{T}_{\mathcal{F}}^{\nu-2}, \mathbf{Z})$ sont les projecteurs de la forme $\chi g \chi$ représentés comme fonctions caractéristiques sur $E^\perp$; il s'agit de calculer la mesure de leurs supports.

Pour un quasi-cristal de dimension $d = 2$ construit dans $\mathbf{R}^4$, l'espace $E^\perp$ est un plan dans lequel on note e_1, e_2, e_3 et e_4 les projetés de la base canonique de $\mathbf{Z}^4$. Le facteur $\mathbf{Z}^2 \subset \mathbf{Z}^4$ choisi pour le corollaire 1 est le sous-groupe engendré par e_1 et e_2. Une fonction $f \in C(\mathbf{T}_{\mathcal{F}}^2, \mathbf{Z})$ est une combinaison linéaire sur $\mathbf{Z}$ d'un nombre fini de fonctions caractéristiques de polygones convexes particuliers appelés Δ-polygones ; les arêtes de ces polygones sont des segments supportés par les droites passant par un projeté de $\mathbf{Z}^4$ et dirigées selon e_1, e_2, e_3 ou e_4. La zone d'acceptance est génériquement un octogone.

Le quasi-cristal connu sous le nom de *quasi-cristal octogonal* est construit de telle sorte que $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $e_3 = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ et $e_4 = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ (après normalisation $\|e_i\| = 1$) ; sa zone d'acceptance est un octogone *régulier*. Ses symétries permettent de montrer que tout Δ-polygone dans ce quasi-cristal se décompose en un nombre fini de Δ-triangles et de Δ-rectangles - il faut remarquer qu'une décomposition en Δ-triangles seulement est impossible en général. On obtient ([3]) :

Théorème 4 : *pour le quasi-cristal octogonal, la trace τ normalisée vérifie :*

$$\tau_*\Big(K_0\big(C^*(\Sigma)\big)\Big) = \frac{1/4\ \mathbf{Z} + \sqrt{2}/2\ \mathbf{Z}}{2(1+\sqrt{2})} = \left\{\frac{m+n\sqrt{2}}{8} \in \frac{\mathbf{Z}+\sqrt{2}\ \mathbf{Z}}{8}\ ,\ m+n \textit{ est pair}\right\}.$$

Dans cet énoncé, la normalisation par $2(1+\sqrt{2})$ est choisie de sorte que la mesure de Lebesgue sur $E^\perp$ de la zone d'acceptance soit égale à 1.

Références :

[1] **Bellissard J., 1986.** K-theory for C^*-algebras in solid state physics, *Lect. Notes Phys. 257 "Statistical mechanics and field theory, mathematical aspects"*, p. 99-256.

[2] **Bellissard J., 1992.** Gap labelling theorems for Schrödinger's operators, contribution to *Number Theory and Physics*, Luck Moussa Waldschmit Eds, Springer.

[3] **Bellissard J., Contensou E., Legrand A., 1997.** K-theory for quasicrytals and their gap labelling, *en préparation*.

[4] **Bratteli O., 1974.** Structure spaces of approximately finite-dimensional C^*-algebras, *J. Funct. Analysis* 16, p. 192-204.

[5] **Contensou E., 1997.** La C^*-algèbre d'une quasi-représentation, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t.324, Série I, p. 293-295.

[6] **Fieux E., 1991.** Classes caractéristiques d'une Π-algèbre et suite spectrale en K-théorie bivariante, *K-Theory* 5, p. 71-96.

[7] **Kasparov G.G., 1988.** Equivariant KK-théorie and the Novikov conjecture, *Invent. Math.* 91, p. 147-201.

[8] **Katz A., Duneau M., 1986.** Quasiperiodics patterns and icosahedral symmetry, *Journal de Physique* 47, p. 181-196.

[9] **Muhly P.S., Renault J.N., Williams D.P., 1987.** Equivalence and isomorphism for groupoïd C^*-algebras, *J. Operator Theory* 17, p. 3-22.

[10] **Renault J., 1980.** A groupoïd approach to C^*-algebras, *Lect. Notes Math.* 793, Springer-Verlag.

[11] **Rieffel M.A., 1982.** Applications of strong Morita equivalence to transformation group C^*-algebras, *Proc. of Symposia in Pure Math.* 38, vol 1, p. 299-310.

Auteurs et correcteurs :

Jean BELLISSARD, Institut Universitaire de France et Institut de Recherche sur les Systèmes Atomiques et Moléculaires Complexes, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne 31062 Toulouse cedex 4 (France). Secrétariat : tél : 05 61 55 68 34, fax : 05 61 55 60 65. E-mail : jeanbel@irsamc2.ups-tlse.fr

Edouard CONTENSOU, André LEGRAND, Laboratoire de Mathématiques Emile Picard - UMR CNRS 8850, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4 (France). Secrétariat : tél : 05 61 55 67 85, fax : 05 61 55 82 00. E-mail E. Contensou : contens@picard.ups-tlse.fr, E-mail A. Legrand : legrand@picard.ups-tlse.fr